

1^o Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Resolvendo Problemas de Extremos em Geometria usando métodos não analíticos: o muito que se pode fazer no ensino médio com um "pouco" de Geometria

José Luiz Rosas Pinho

Departamento de Matemática - UFSC
pinho@pet.mtm.ufsc.br

Brasília, 27 a 29 de setembro de 2013

Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

Sumário

Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de Extremos em Geometria

São problemas nos quais deseja-se encontrar valores máximos ou mínimos de medidas de segmentos, perímetros, áreas, ângulos etc em uma figura dada, ou determinar quais objetos geométricos satisfazem uma condição de extremo tal como perímetro, área etc máximo ou mínimo.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de Extremos em Geometria

São problemas nos quais deseja-se encontrar valores máximos ou mínimos de medidas de segmentos, perímetros, áreas, ângulos etc em uma figura dada, ou determinar quais objetos geométricos satisfazem uma condição de extremo tal como perímetro, área etc máximo ou mínimo.

Exemplos:

1) *Calcular a área máxima de um triângulo retângulo de hipotenusa dada.*

2) *Mostrar que dentre os triângulos inscritos em uma circunferência dada e com um lado dado, aquele que tem perímetro máximo é o triângulo isósceles.*

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de Extremos em Geometria

- ▶ Solução analítica: via geometria analítica e Cálculo Diferencial.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de Extremos em Geometria

- ▶ Solução analítica: via geometria analítica e Cálculo Diferencial.
- ▶ Solução "sintética": via construções geométricas → criatividade, problemas olímpicos

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Solução "sintética" - Dificuldade

Em uma abordagem puramente geométrica é preciso algumas vezes partir do fato que o problema possui solução.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Solução "sintética" - Dificuldade

Em uma abordagem puramente geométrica é preciso algumas vezes partir do fato que o problema possui solução.

Isso nem sempre é possível de se fazer com argumentos geométricos.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Solução "sintética" - Dificuldade

Em uma abordagem puramente geométrica é preciso algumas vezes partir do fato que o problema possui solução.

Isso nem sempre é possível de se fazer com argumentos geométricos.

A existência de solução é, portanto, uma das maiores dificuldades que podemos encontrar na resolução desses problemas.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Existência de solução

Problemas de extremo em geometria nem sempre possuem solução.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Existência de solução

Problemas de extremo em geometria nem sempre possuem solução.

Exemplo: determinar os polígonos de área mínima e de área máxima inscritos em uma circunferência dada.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Argumento de continuidade

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Argumento de continuidade

Teorema(Weierstrass) - Seja f uma função real contínua definida em um compacto K . Então f assume um máximo e um mínimo em K .

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Argumento de continuidade

Teorema(Weierstrass) - Seja f uma função real contínua definida em um compacto K . Então f assume um máximo e um mínimo em K .

Teorema - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Então f assume um mínimo absoluto em algum x real.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Argumento de continuidade

Teorema(Weierstrass) - Seja f uma função real contínua definida em um compacto K . Então f assume um máximo e um mínimo em K .

Teorema - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Então f assume um mínimo absoluto em algum x real.

Teorema - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua positiva tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Então f assume um máximo absoluto em algum x real.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Sumário

Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Heron

- ▶ Heron de Alexandria viveu entre 150 a.C. e 250 d.C.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Heron

- ▶ Heron de Alexandria viveu entre 150 a.C. e 250 d.C.
- ▶ Escreveu *A Métrica*, obra em em três livros, que foi descoberta em 1896 em Constantinopla, por R. Schöne

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Heron

- ▶ Heron de Alexandria viveu entre 150 a.C. e 250 d.C.
- ▶ Escreveu *A Métrica*, obra em em três livros, que foi descoberta em 1896 em Constantinopla, por R. Schöne
- ▶ Na obra *Catóptrica (Reflexão)* - do grego Κατοπτρον Catoptron, espelho - Heron mostrou, com um argumento geométrico, a igualdade dos ângulos de incidência e de reflexão de um raio de luz em um espelho

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Heron

Dados dois pontos **A** e **B** e dada uma reta r que não passa por esses pontos, encontrar um ponto **P** incidente a r tal que a soma **AP+BP** seja mínima.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

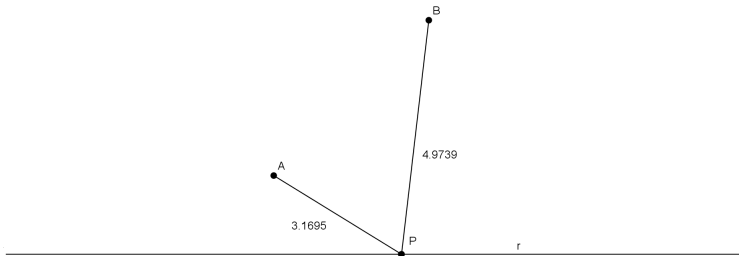
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$AP + BP = 8.1434$$



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

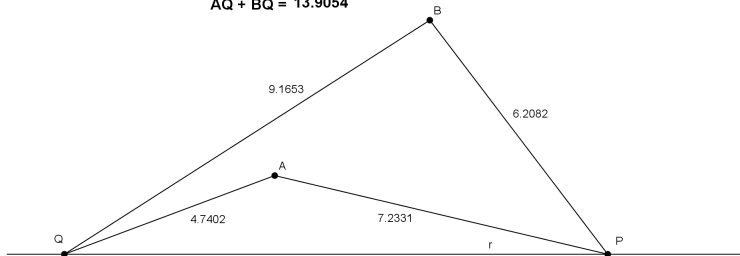
Referências

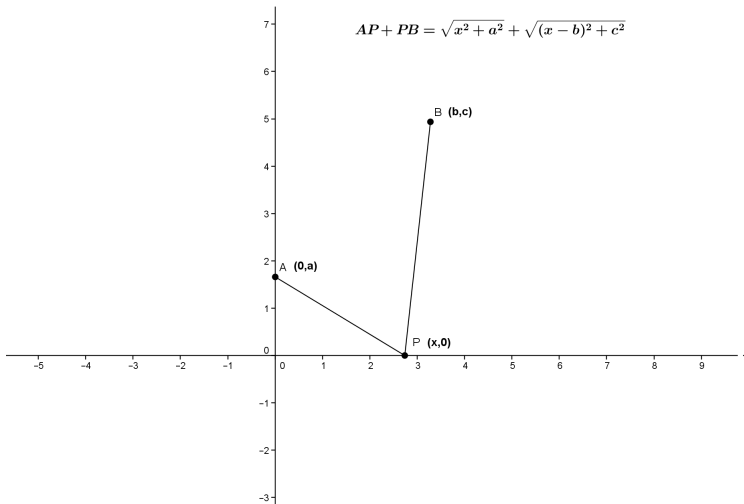
Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

$$AP + BP = 13.4412$$

$$AQ + BQ = 13.9054$$





Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} = 0$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} = 0$$

$$x^2((x - b)^2 + c^2) = (x - b)^2(x^2 + a^2)$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} = 0$$

$$x^2((x - b)^2 + c^2) = (x - b)^2(x^2 + a^2)$$

$$x^2(c)^2 = a^2(x - b)^2$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} = 0$$

$$x^2((x - b)^2 + c^2) = (x - b)^2(x^2 + a^2)$$

$$x^2(c)^2 = a^2(x - b)^2$$

$$\left| \frac{x}{x - b} \right| = \frac{a}{c}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + c^2}} = 0$$

$$x^2((x - b)^2 + c^2) = (x - b)^2(x^2 + a^2)$$

$$x^2(c)^2 = a^2(x - b)^2$$

$$\left| \frac{x}{x - b} \right| = \frac{a}{c}$$

$$x = \frac{ab}{a + c} \quad \text{ou} \quad x = \frac{ab}{a - c}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

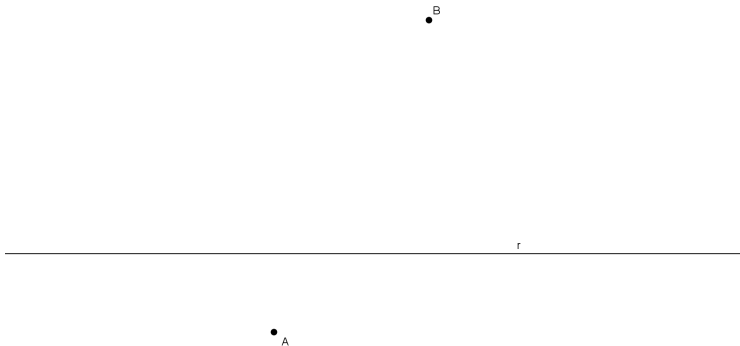
"Probleminhas" e
Problemas

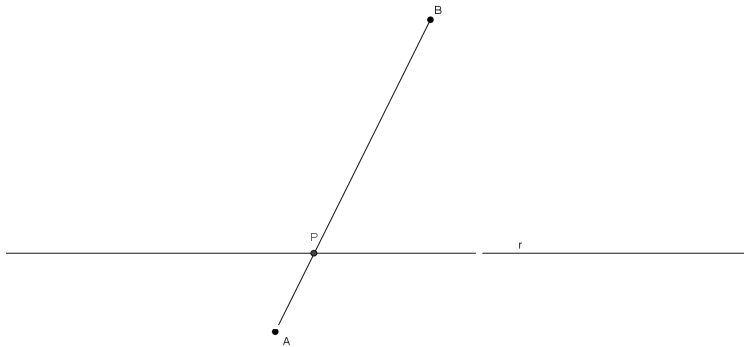
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências





Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

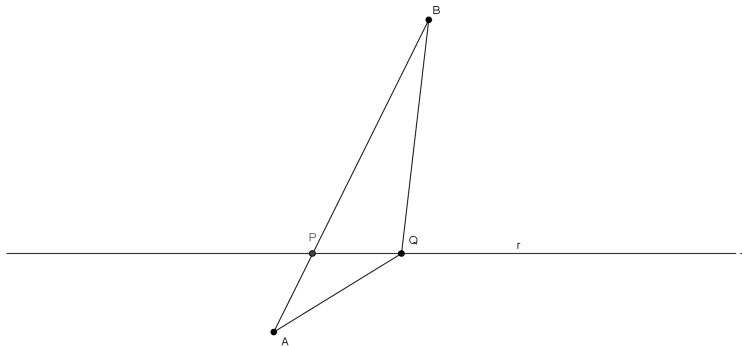
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

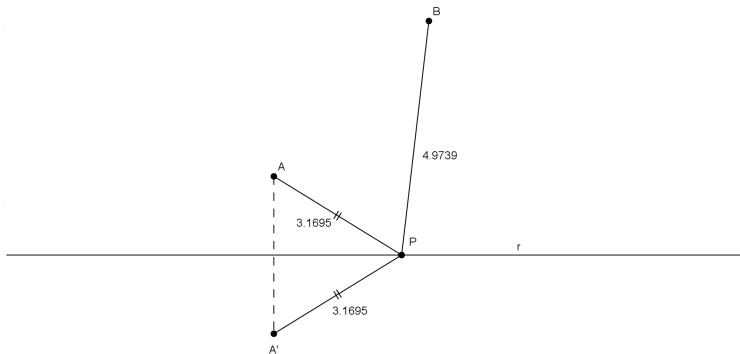
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$AP + BP = A'P + BP = 8.1434$$



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

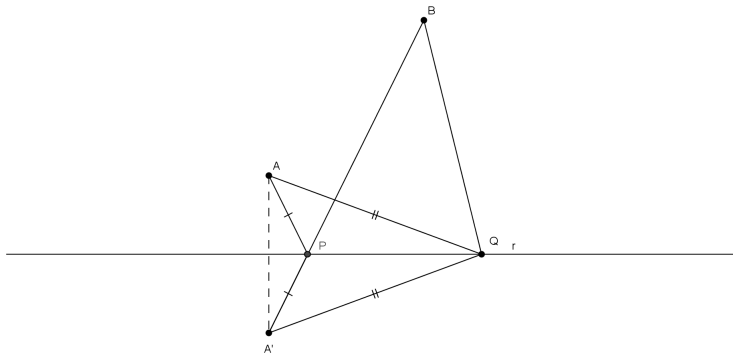
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$AP + BP = A'P + BP < AQ + BQ$$



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

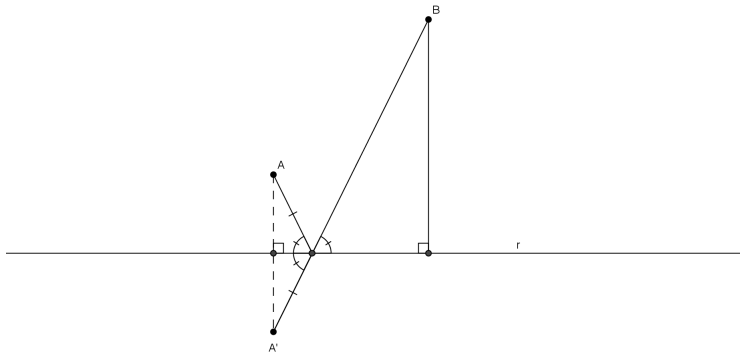
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

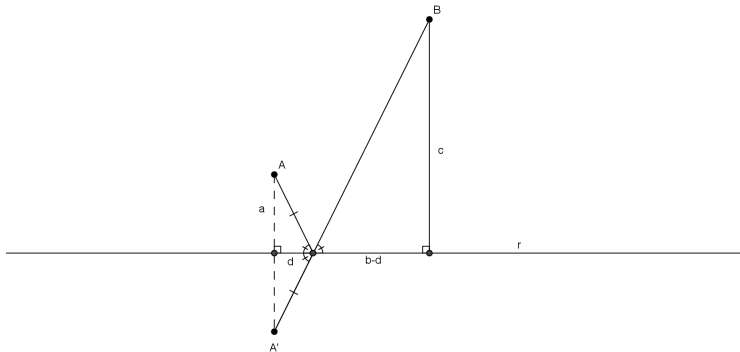
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\frac{d}{a} = \frac{b-d}{c}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\frac{d}{a} = \frac{b-d}{c}$$

$$cd = ab - ad$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\frac{d}{a} = \frac{b-d}{c}$$

$$cd = ab - ad$$

$$d = \frac{ab}{a+c}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

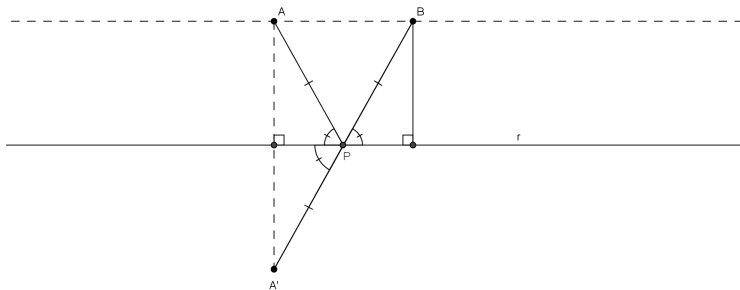
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\overrightarrow{AB} \parallel r$$



Problema de Heron - Variação 1

Determinar o triângulo com um lado dado e de área dada que tenha perímetro mínimo.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

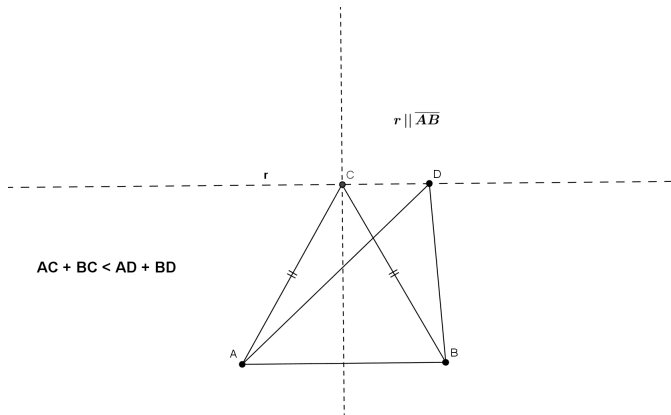
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problema de Heron - Variação 2

Determinar o triângulo com um lado dado e de perímetro dado que tenha área máxima.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

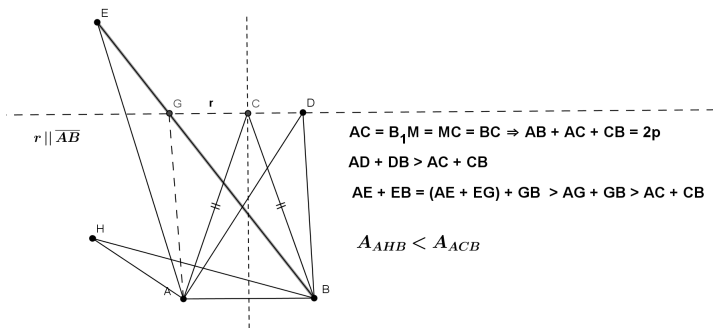
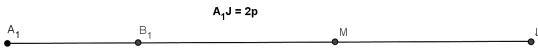
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Heron

Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido



$$AC = B_1M = MC = BC \Rightarrow AB + AC + CB = 2p$$

$$AD + DB > AC + CB$$

$$AE + EB = (AE + EG) + GB > AG + GB > AC + CB$$

$$A_{AHB} < A_{ACB}$$

Problema de Heron - Variações 3 e 4

Determinar o triângulo de área dada e perímetro mínimo.

Determinar o triângulo de perímetro dado e área máxima.

(admitindo a existência nos dois problemas)

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano

- ▶ Proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766)

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano

- ▶ Proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766)
- ▶ Fagnano mostrou a existência solução.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano

- ▶ Proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766)
- ▶ Fagnano mostrou a existência solução.
- ▶ Em 1775 seu filho, Giovanni Francesco Fagnano (1715-1797) completou a demonstração do pai usando cálculo diferencial.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano

- ▶ Proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766)
- ▶ Fagnano mostrou a existência solução.
- ▶ Em 1775 seu filho, Giovanni Francesco Fagnano (1715-1797) completou a demonstração do pai usando cálculo diferencial.
- ▶ Duas soluções usando métodos geométricos: a do matemático alemão Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), e a do matemático húngaro Lipót Fejér (1880-1959).

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano

Inscrever em um triângulo acutângulo um triângulo de perímetro mínimo.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

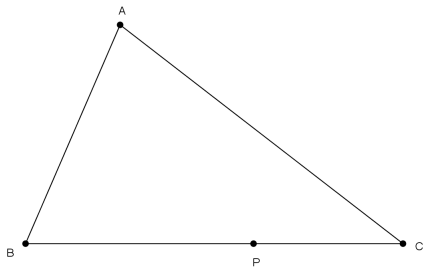
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Fejér



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

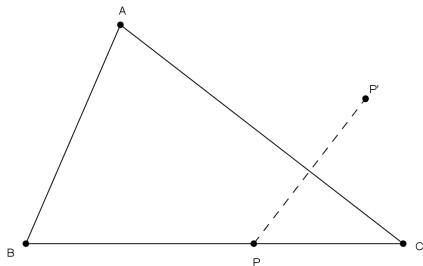
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Fejér



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Fejér

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

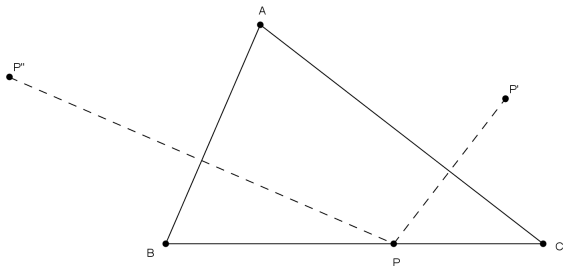
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problema de Fagnano - Solução de Fejér

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

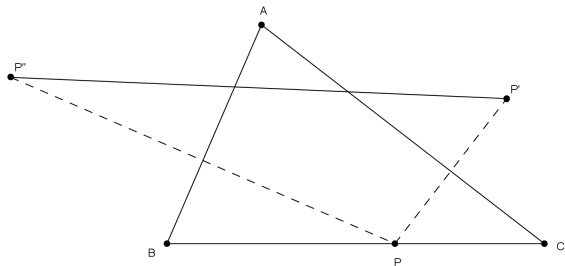
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problema de Fagnano - Solução de Fejér

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

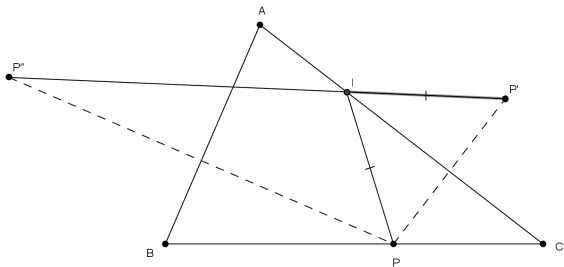
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências



Problema de Fagnano - Solução de Fejér

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de
Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

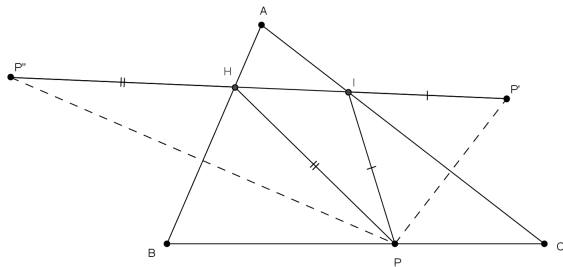
"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

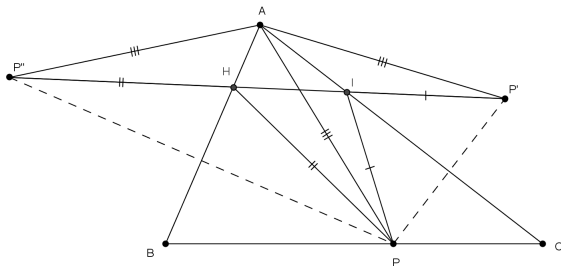
Algumas
Aplicações

Referências



Problema de Fagnano - Solução de Fejér

$$AP = AP' = AP''$$



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

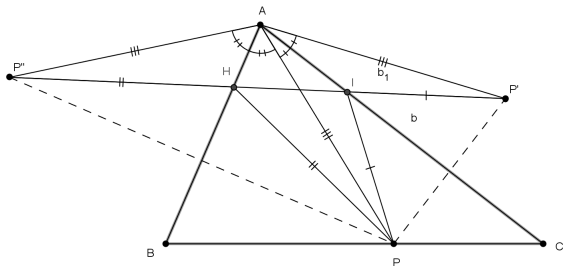
Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Fejér

$$AP = AP' = AP''$$

$$P''\hat{A}B = P\hat{A}B \quad \text{e} \quad P'\hat{A}C = P\hat{A}P$$



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

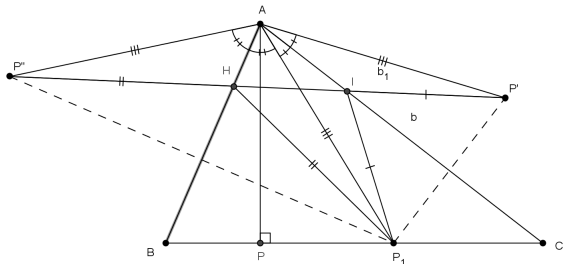
Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Fejér

$$AP = AP' = AP'' \quad P''\hat{A}B = P\hat{A}B \quad \text{e} \quad P'\hat{A}C = P\hat{A}C \Rightarrow P''\hat{A}P' = 2 \cdot B\hat{A}C$$

Portanto o perímetro do ΔPHI , $PH + HI + IP = P''P'$ será mínimo quando $AP'' = AP' = AP$ for mínimo, ou seja, quando $AP \perp BC$.



Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

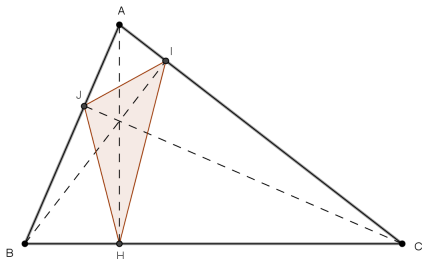
Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Fejér

Triângulo órtico do ΔABC



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

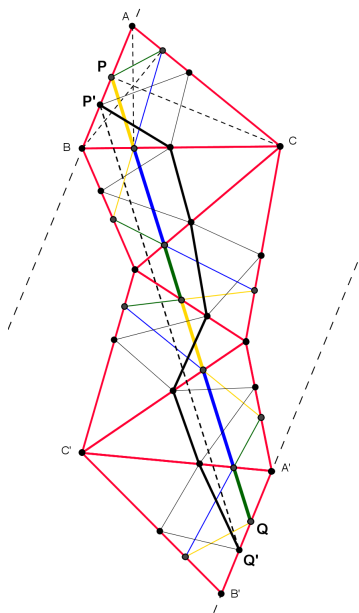
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fagnano - Solução de Schwarz



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de

Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus

- ▶ Johann Müller (1436-1476) foi um dos maiores matemáticos do século XV.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus

- ▶ Johann Müller (1436-1476) foi um dos maiores matemáticos do século XV.
- ▶ Nasceu na cidade alemã de Königsberg in Bayern, Bavaria (não confundir com a cidade homônima na antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado na Rússia, e conhecida pelo famoso problema das pontes de Euler).

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus

- ▶ Johann Müller (1436-1476) foi um dos maiores matemáticos do século XV.
- ▶ Nasceu na cidade alemã de Königsberg in Bayern, Bavaria (não confundir com a cidade homônima na antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado na Rússia, e conhecida pelo famoso problema das pontes de Euler).
- ▶ Ficou conhecido pelo nome de Regiomontanus, uma latinização do nome alemão de sua cidade natal.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus

- ▶ Johann Müller (1436-1476) foi um dos maiores matemáticos do século XV.
- ▶ Nasceu na cidade alemã de Königsberg in Bayern, Bavaria (não confundir com a cidade homônima na antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado na Rússia, e conhecida pelo famoso problema das pontes de Euler).
- ▶ Ficou conhecido pelo nome de Regiomontanus, uma latinização do nome alemão de sua cidade natal.
- ▶ Seu problema foi enunciado em 1471, em uma carta a Christian Roder, professor da Universidade de Erfurt.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Regiomontanus - Königsberg in Bayern



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus

O problema de Regiomontanus consiste em determinar a distância d que um observador de altura h deve ficar da base do pedestal de altura p de uma estátua, de altura s , de modo que seu ângulo de visão θ dessa estátua seja máximo.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

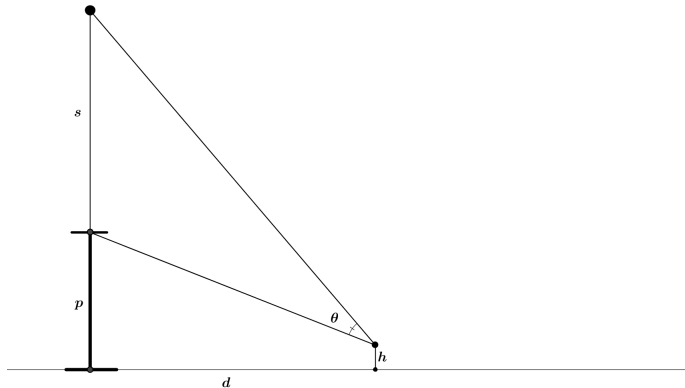
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

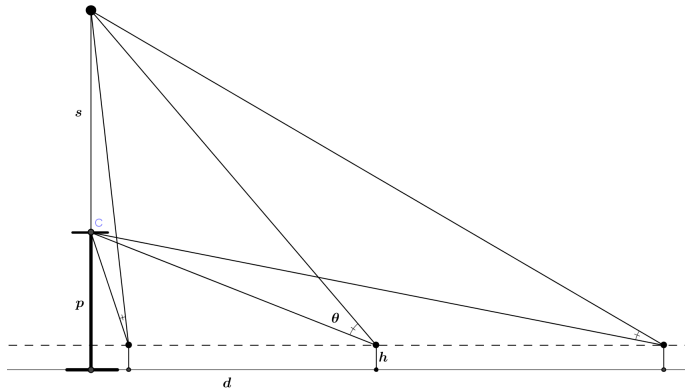
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

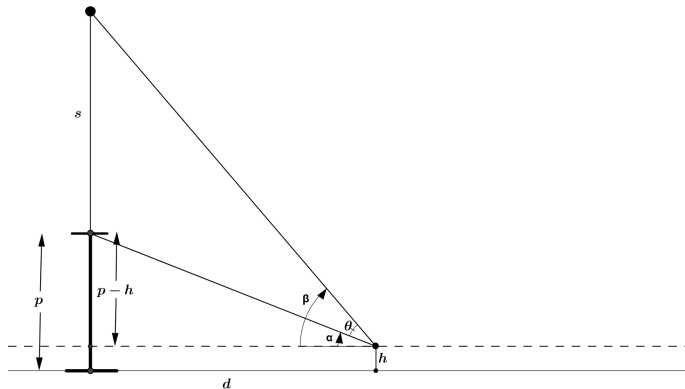
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

**Problema de
Regiomontanus**

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{s + p - h}{x} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha) = \frac{p - h}{x}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{s + p - h}{x} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha) = \frac{p - h}{x}$$

$$f(x) = \tan \theta(x) = \frac{sx}{x^2 + k(s + k)} \quad \text{em que} \quad k = p - h$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{s + p - h}{x} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha) = \frac{p - h}{x}$$

$$f(x) = \tan \theta(x) = \frac{sx}{x^2 + k(s + k)} \quad \text{em que} \quad k = p - h$$

$$f'(x) = \frac{-sx^2 + ks(s + k)}{[x^2 + k(s + k)]^2} = 0$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{s + p - h}{x} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha) = \frac{p - h}{x}$$

$$f(x) = \tan \theta(x) = \frac{sx}{x^2 + k(s + k)} \quad \text{em que} \quad k = p - h$$

$$f'(x) = \frac{-sx^2 + ks(s + k)}{[x^2 + k(s + k)]^2} = 0$$

$$x = \sqrt{k(s + k)} = \sqrt{(p - h)(s + p - h)}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

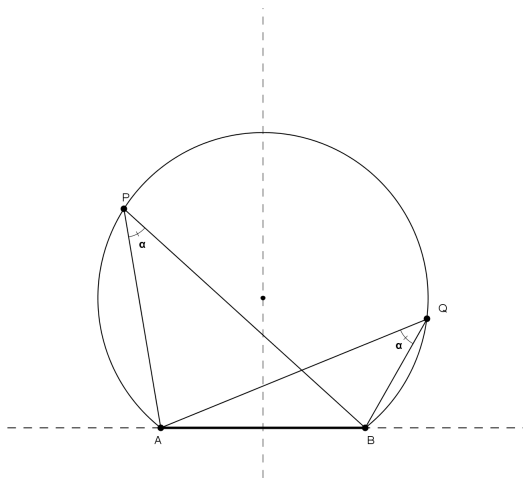
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

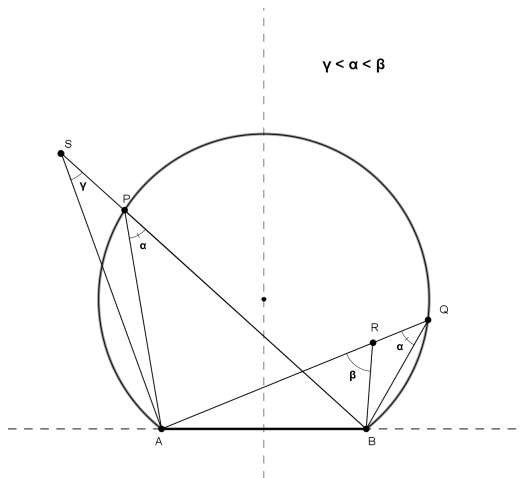
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

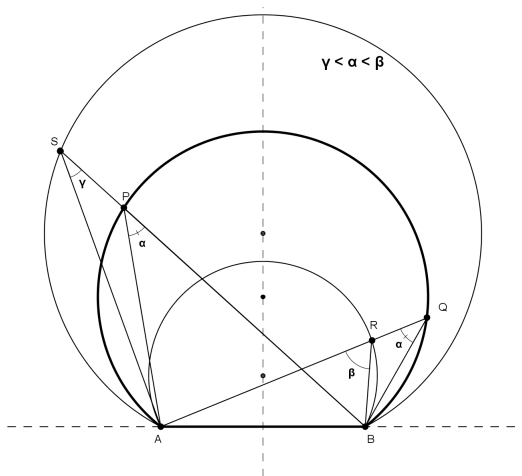
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

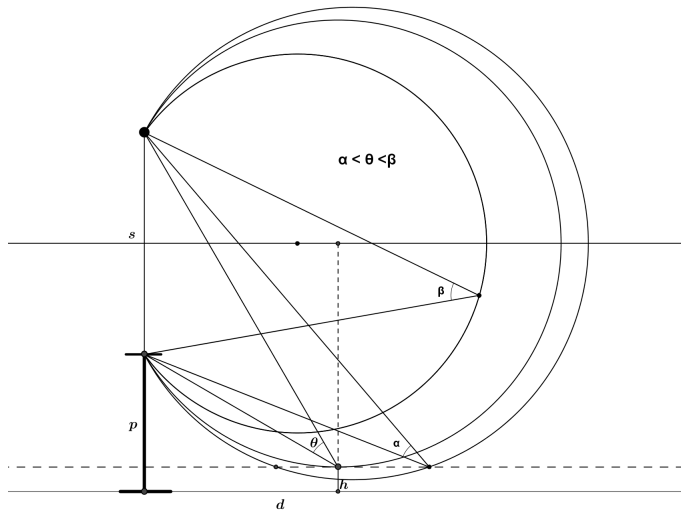
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

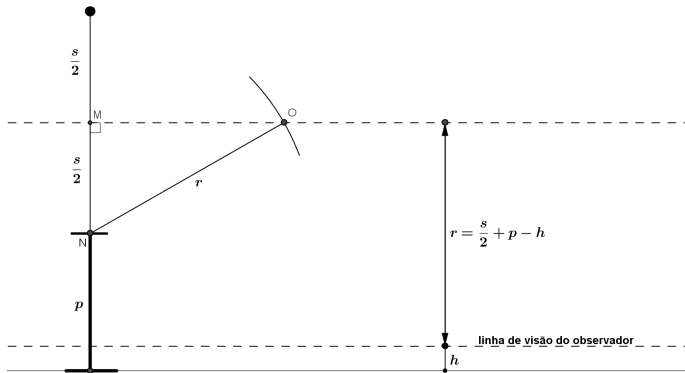
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

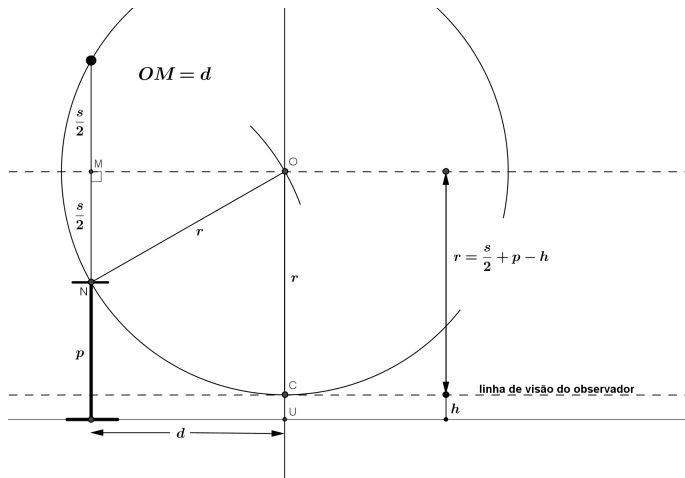
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Regiomontanus



Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

- Problema de Heron
- Problema de Fagnano
- Problema de Regiomontanus**
- Problema de Fermat
- Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

$$d^2 = r^2 - MN^2 = \left(\frac{s}{2} + p - h\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

**Problema de
Regiomontanus**

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$d^2 = r^2 - MN^2 = \left(\frac{s}{2} + p - h\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$d^2 = (p - h)^2 + s(p - h)$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$d^2 = r^2 - MN^2 = \left(\frac{s}{2} + p - h\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$d^2 = (p - h)^2 + s(p - h)$$

$$d^2 = (p - h)(s + p - h)$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$d^2 = r^2 - MN^2 = \left(\frac{s}{2} + p - h\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$d^2 = (p - h)^2 + s(p - h)$$

$$d^2 = (p - h)(s + p - h)$$

$$d = \sqrt{(p - h)(s + p - h)}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
**Problema de
Regiomontanus**
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

- ▶ Proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) em seu *Métodos de determinação de máximos e mínimos, e de tangentes a curvas*.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

- ▶ Proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) em seu *Métodos de determinação de máximos e mínimos, e de tangentes a curvas*.
- ▶ Torricelli (1608-1647) resolveu o problema em algum período antes de 1640, localizando o ponto solução do problema (chamado de ponto de Fermat, ou Torricelli, ou de Steiner).

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

- ▶ Proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) em seu *Métodos de determinação de máximos e mínimos, e de tangentes a curvas*.
- ▶ Torricelli (1608-1647) resolveu o problema em algum período antes de 1640, localizando o ponto solução do problema (chamado de ponto de Fermat, ou Torricelli, ou de Steiner).
- ▶ Vincenzo Viviani (1622-1703), aluno de Torricelli, publicou a solução de seu mestre no livro *De maximis et minimis*, em 1659.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

- ▶ Proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) em seu *Métodos de determinação de máximos e mínimos, e de tangentes a curvas*.
- ▶ Torricelli (1608-1647) resolveu o problema em algum período antes de 1640, localizando o ponto solução do problema (chamado de ponto de Fermat, ou Torricelli, ou de Steiner).
- ▶ Vincenzo Viviani (1622-1703), aluno de Torricelli, publicou a solução de seu mestre no livro *De maximis et minimis*, em 1659.
- ▶ Cavalieri, Simpson e Jacob Steiner (1796-1863) trabalharam neste problema.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

Encontrar um ponto do plano cuja soma das distâncias a três outros pontos dados é mínima.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

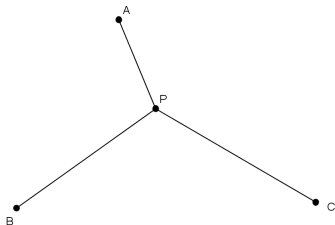
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

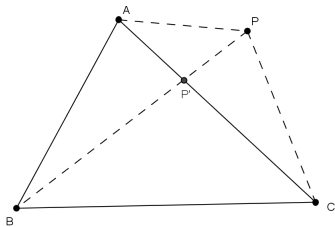
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

$$PA + PC + PB > AC + P'B = P'A + P'C + P'B$$



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

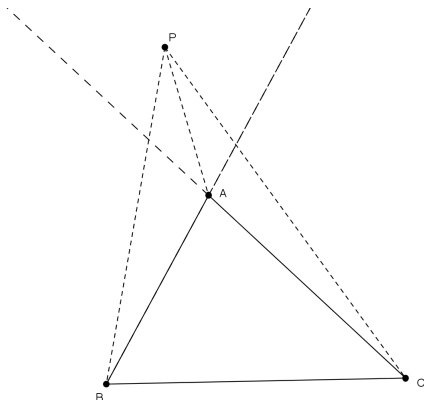
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



$$PB + PC + PA > AB + AC + PA > AB + AC$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

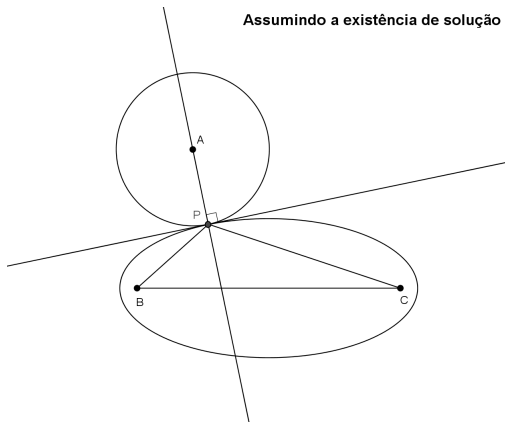
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

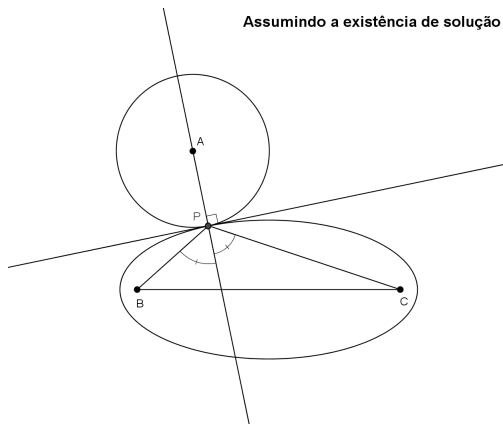
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

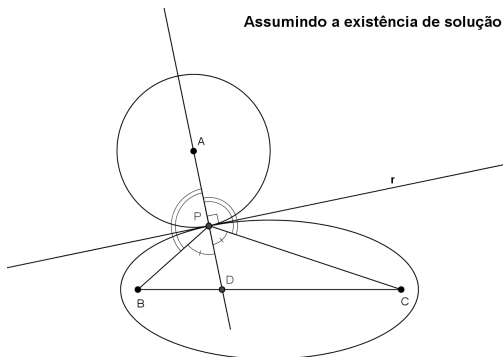
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



r tangente à elipse $\Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{CPD} \Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{APC}$

Analogamente teremos $\widehat{APB} = \widehat{BPC}$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

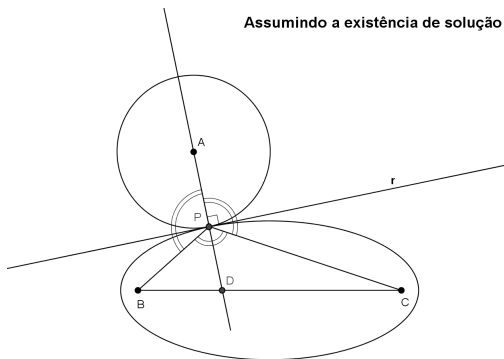
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Portanto $\hat{A}PB = \hat{B}PC = \hat{A}PC = 120^\circ$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

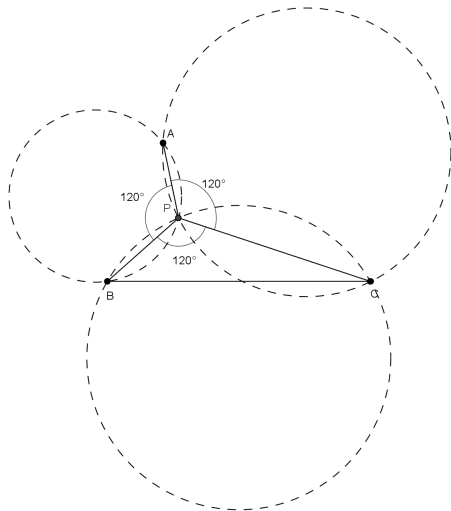
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

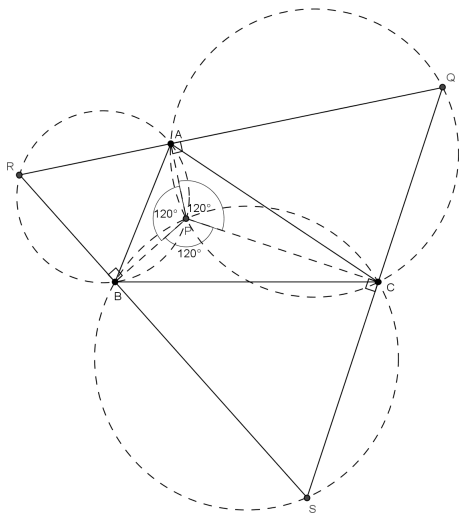
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

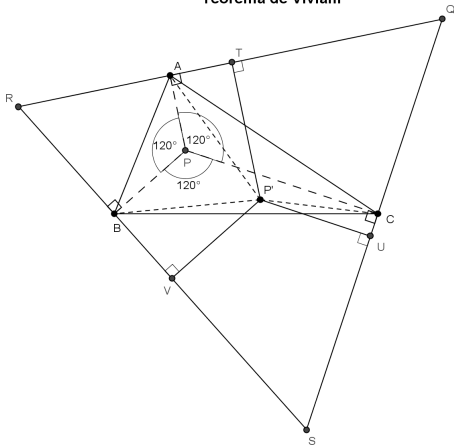
Referências

Problema de Fermat

$$P'A + P'B + P'C > P'T + P'V + P'U = PA + PB + PC$$



Teorema de Viviani



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

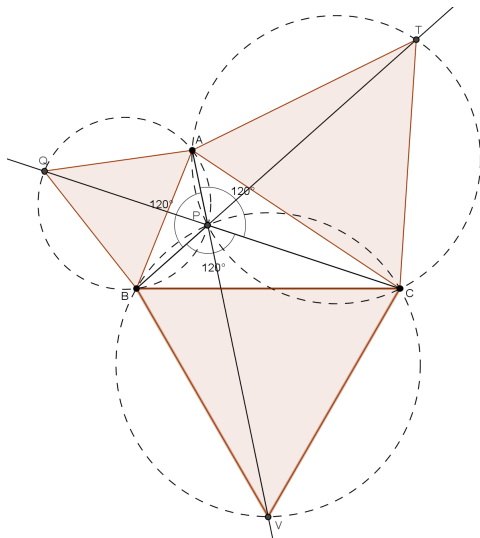
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

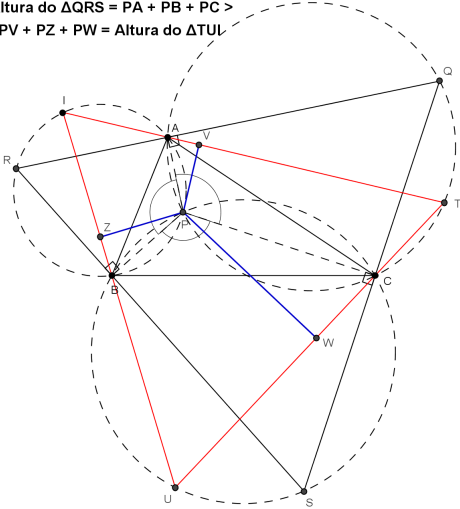
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Fermat

Altura do $\Delta QRS = PA + PB + PC >$
> $PV + PZ + PW = \text{Altura do } \Delta TUL$



Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

Problema de Dido

- ▶ Sugerido na lenda da criação da cidade de Cartago, cujas ruínas se encontram na atual Tunísia, pela princesa fenícia Dido (ou Elisa, ou Elisha).

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido

- ▶ Sugerido na lenda da criação da cidade de Cartago, cujas ruínas se encontram na atual Tunísia, pela princesa fenícia Dido (ou Elisa, ou Elisha).
- ▶ A lenda de Dido ficou bem conhecida através da obra épica *Eneida* do poeta romano Virgílio (Publius Vergilius Maro - 70 a.C. a 19 a.C.). A lenda foi anteriormente relatada pelo historiador grego Timaeus de Tauromenium (cerca de 356-260 a.C.), em sua *Geografia do Mundo Ocidental*, e posteriormente pelo historiador romano Marcus Junianus Justinus (século II ou III d.C.) em sua obra *Epítome da História Filípica de Pompeius Trogus*.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - Clássico problema isoperimétrico

Dentre todas as curvas simples fechadas de comprimento L determinar aquela que engloba a maior área.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

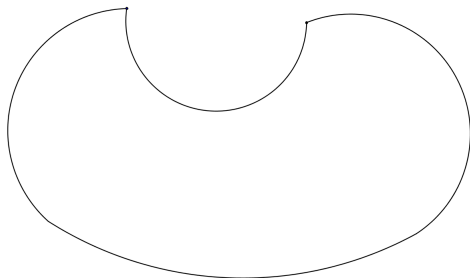
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

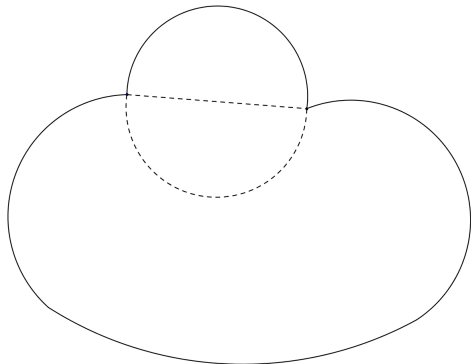
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

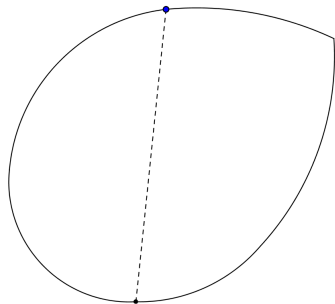
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

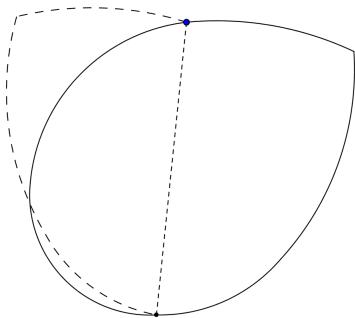
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

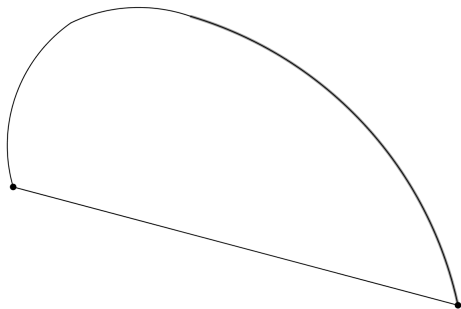
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

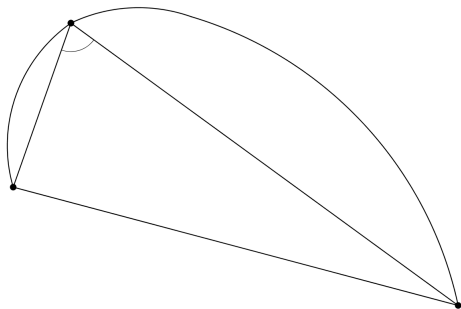
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

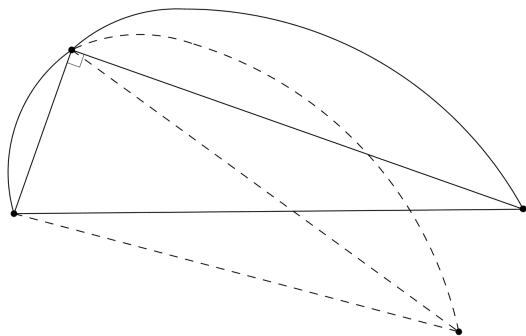
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

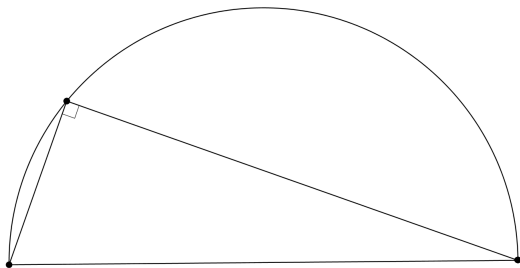
Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problema de Dido - "Solução" de Steiner



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Sumário

Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron

Problema de Fagnano

Problema de Regiomontanus

Problema de Fermat

Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

**"Probleminhas" e
Problemas**

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

**"Probleminhas" e
Problemas**

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

1. Dada uma circunferência de centro O , encontrar o triângulo com um vértice em O e os outros dois vértices na circunferência, tal que sua área seja máxima

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

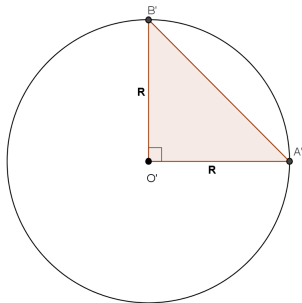
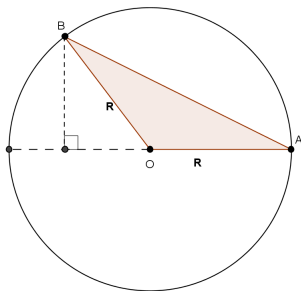
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

1. Dada uma circunferência de centro O , encontrar o triângulo com um vértice em O e os outros dois vértices na circunferência, tal que sua área seja máxima



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 2 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cuja área seja máxima

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

**"Probleminhas" e
Problemas**

Grupos

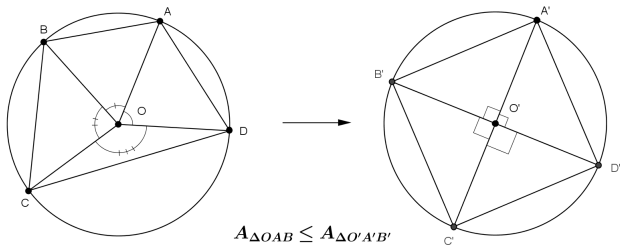
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

2 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cuja área seja máxima



$$A_{\Delta OAB} \leq A_{\Delta O'A'B'}$$

$$A_{\Delta OBC} < A_{\Delta O'B'C'}$$

$$A_{\Delta OCD} \leq A_{\Delta O'C'D'}$$

$$A_{\Delta ODA} \leq A_{\Delta O'D'A'}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 3 Dada uma circunferência e dada uma corda nessa circunferência, encontrar o triângulo inscrito nessa circunferência que tenha área máxima e tal que a corda dada seja um de seus lados.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

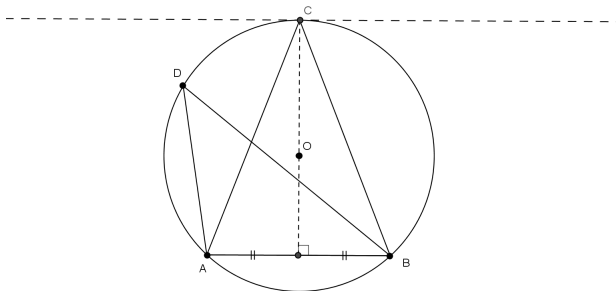
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 3 Dada uma circunferência e dada uma corda nessa circunferência, encontrar o triângulo inscrito nessa circunferência que tenha área máxima e tal que a corda dada seja um de seus lados.



$A_{\Delta ABC} > A_{\Delta ABD}$ qualquer que seja o ponto D na circunferência e distinto de C

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 4 Dada uma circunferência e dada uma corda nessa circunferência, encontrar o triângulo inscrito nessa circunferência que tenha perímetro máximo e tal que a corda dada seja um de seus lados.

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

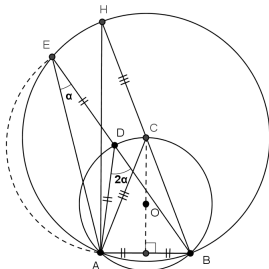
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 4 Dada uma circunferência e dada uma corda nessa circunferência, encontrar o triângulo inscrito nessa circunferência que tenha perímetro máximo e tal que a corda dada seja um de seus lados.



- ▶ Conforme o ponto D varia na circunferência menor, o ponto E varia na circunferência maior.
- ▶ Note que, como $BD = AD + BD$, se $\hat{A}DB = 2\alpha$, então $\hat{A}EB = \alpha$, ou seja, enquanto o ponto D descreve o arco capaz do ângulo 2α em relação ao segmento \overline{AB} , o ponto E descreve o arco capaz do ângulo α em relação ao segmento \overline{AB} .
- ▶ A soma BE dos dois lados do triângulo será máxima quando essa corda for o diâmetro.
- ▶ $2p_{\Delta ABC} > 2p_{\Delta ABD}$ qualquer que seja o ponto D na circunferência menor e distinto de C

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 5 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cujo perímetro seja máximo

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

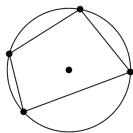
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 5 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cujo perímetro seja máximo



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

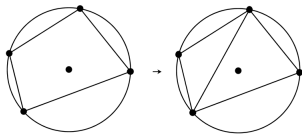
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 5 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cujo perímetro seja máximo



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

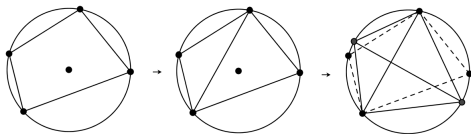
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

5 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cujo perímetro seja máximo



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

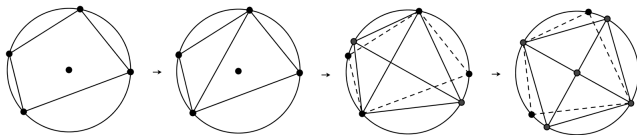
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

5 Encontrar o quadrilátero inscrito em uma circunferência dada cujo perímetro seja máximo



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

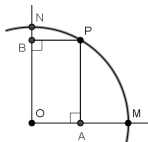
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

- 6 Mostrar que, dentre todos os retângulos de perímetro dado aquele que tem área máxima é o quadrado.
- 7 Encontrar, dentre todos os quadriláteros de perímetro dado aquele que tem área máxima.
- 8 Encontrar, dentre todos os quadriláteros de área dada aquele que tem perímetro mínimo.
- 9 Seja **P** um ponto do arco **MN** da figura abaixo. Mostrar que a soma **PA + PB** é máxima quando **P** estiver na bissetriz do ângulo $\angle MON$.



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

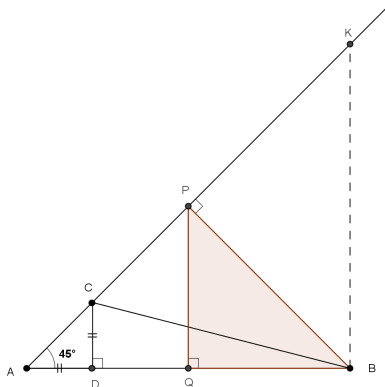
Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

"Probleminhas" ...

10 Encontrar o triângulo retângulo cuja soma dos catetos é dada e que tem hipotenusa mínima



Qualquer que seja o ponto C na semirreta \overrightarrow{AK} a soma $BD + CD$ dos catetos do triângulo retângulo $\triangle BCD$ será igual a AB .

Problemas de Extremos em Geometria

Problemas Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e Problemas

Grupos

Tornando o Cubo um Grupo

Algumas Aplicações

Referências

- 11 Na figura a seguir o raio da circunferência é igual a 6 e a distância PC é igual a 10. Por P traça-se uma reta r que intercepta a circunferência em dois pontos A e B . Variando a inclinação da reta r produzimos outros pontos A e B , e conseqüentemente temos novos triângulos ABC . Dentre todos esses triângulos, um deles possui a maior área. Calcular essa área.
(XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina 2010 - Nível 3)

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

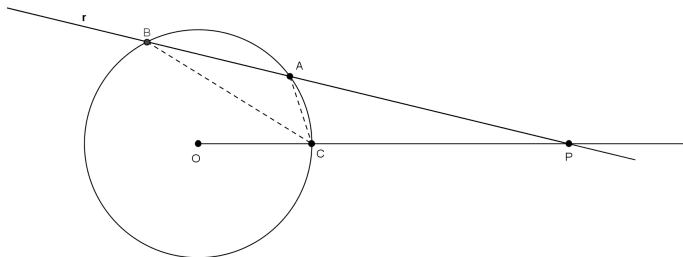
**"Probleminhas" e
Problemas**

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

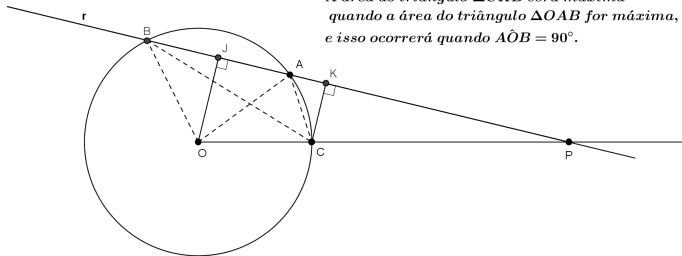
Algumas
Aplicações

Referências



$$\frac{CK}{OJ} = \frac{PC}{PO} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \quad \text{portanto,} \quad \frac{A_{\Delta CKB}}{A_{\Delta OAB}} = \left(\frac{CK}{OJ}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)$$

A área do triângulo ΔCKB será máxima quando a área do triângulo ΔOAB for máxima, e isso ocorrerá quando $A\hat{O}B = 90^\circ$.



Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$OJ = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad AB = 2OJ = 6\sqrt{2}$$

Problemas de
Extremos em
Geometria

Problemas
Históricos

Problema de Heron
Problema de Fagnano
Problema de
Regiomontanus
Problema de Fermat
Problema de Dido

"Probleminhas" e
Problemas

Grupos

Tornando o Cubo
um Grupo

Algumas
Aplicações

Referências

$$OJ = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad AB = 2OJ = 6\sqrt{2}$$

$$CK = \frac{5OJ}{8} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

$$OJ = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad AB = 2OJ = 6\sqrt{2}$$

$$CK = \frac{5OJ}{8} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

$$A_{\triangle CAB} = \frac{AB \cdot CK}{2} = \frac{(6\sqrt{2})(15\sqrt{2})}{16} = \frac{45}{4}$$